

# Sottounità. S6

Disciplina : fisica

Docente : Renzo Ragazzon

## Il foglio di calcolo come "palestra" di programmazione

Le istruzioni che un calcolatore deve eseguire vengono scritte utilizzando i cosiddetti linguaggi di programmazione (Pascal, Fortran, C, per fare qualche esempio). Da un punto di vista didattico ciò può porre, soprattutto nella scuola secondaria superiore, significativi problemi di tempo: anche il più semplice dei programmi richiede diverse ore di lezione, la maggior parte delle quali deve essere impiegata per introdurre lo specifico linguaggio di programmazione che si intende usare. Oggi, sfruttando le potenzialità dei più diffusi pacchetti software, è però possibile ovviare a tale inconveniente e scrivere veri e propri programmi senza in realtà conoscere alcun linguaggio di programmazione di tipo tradizionale. Ci riferiamo in particolare ai fogli di calcolo (es: Excel) in cui le *celle* possono essere considerate come variabili, mentre le *formule* in esse inserite svolgono la funzione di *istruzioni di assegnazione*.

Nell'unità didattica che proponiamo, si mostra come un numero estremamente ridotto di tali istruzioni sia sufficiente per risolvere una classe di problemi particolarmente importante: la determinazione del moto di un punto materiale attraverso equazioni alle differenze finite. Inoltre, utilizzando le normali funzioni del foglio di calcolo, sarà anche possibile visualizzare le soluzioni ottenute attraverso semplici animazioni. Dal punto di vista didattico, ci sembra che questo aspetto non vada sottovalutato: si tratta infatti di una occasione per mostrare come la grafica animata sia gestita da quelle stesse funzioni matematiche che sui banchi di scuola appaiono spesso come aride e statiche.

Il problema specifico che abbiamo deciso di affrontare è il moto di una massa soggetta ad una forza centrale di tipo gravitazionale o Coulombiano; è però evidente che la tecnica può essere adattata facilmente ad altri problemi in cui si conosca la dipendenza funzionale della forza dalla posizione.

Vogliamo infine sottolineare come la problematica generale che affrontiamo ben si presti a chiarire un concetto fondamentale: i pregi ed i difetti delle cosiddette soluzioni *numeriche* di un problema, rispetto a quelle *analitiche* ottenute senza l'uso dei mezzi informatici.

## Prerequisiti

### Prerequisiti informatici

- Conoscenza elementare del sistema operativo Windows 95 (o successivo)
- Inserimento di costanti e formule in Excel
- Creazione di grafici in Excel
- Concetto di *variabile* ed *istruzione di assegnazione*

### Prerequisiti disciplinari (Fisica)

- Moto rettilineo uniforme ed uniformemente accelerato
- Conoscenza della legge di gravitazione universale

- Consapevolezza dei problemi posti dalle forze non costanti
- Algebra vettoriale elementare
- Scomposizione di un moto e dei suoi elementi lungo gli assi cartesiani
- Possesso del concetto, anche non rigoroso, di velocità ed accelerazione istantanea
- Concetto di funzione
- Algebra vettoriale elementare
- Familiarità con relazioni del tipo:
 
$$x(t + \Delta t) \cong x(t) + v_x(t)\Delta t$$

$$v_x(t + \Delta t) \cong v_x(t) + a_x(t)\Delta t$$
 e analoghe per la componente y di un moto piano.

## Obiettivi

### Obiettivi “Informatici”

- Comprendere il ruolo di alcune “strutture” fondamentali di un programma:
  - Istruzioni di assegnazione
  - Istruzioni di assegnazione con riferimenti circolari (es  $t=t+\Delta t$ )
  - Strutture di iterazione
- Introdurre gli studenti alla programmazione, utilizzando come pretesto la simulazione di un processo fisico.

### Obiettivi disciplinari (Fisica)

- Apprezzare il significato della seconda legge della dinamica, intesa come legge di evoluzione deterministica
- Comprendere come si possano risolvere problemi dinamici in cui le forze non sono costanti
- Comprendere cosa si intende per *soluzioni numerica* di un problema dinamico, riconoscendo il ruolo che in tale contesto viene svolto da un computer

### Obiettivi inerenti il progetto

- Apprezzare il fatto che per *istruire* un computer è necessaria una fase in cui si utilizza un linguaggio testuale (non iconico) in cui il formalismo algebrico-matematico può svolgere un ruolo essenziale.
- Comprendere che il computer, di norma, non può impostare la strategia risolutiva di un problema: questo è un compito che spetta all’utente-programmatore, al quale, pertanto, si richiedono opportune conoscenze specifiche, non di rado di tipo matematico o fisico.
- Rendersi conto del fatto che le animazioni grafiche vengono gestite da equazioni e funzioni scritte in “linguaggio testuale”

## Schema delle attività e loro scansione temporale

### Attività 1 (5minuti)

Si richiama il concetto di *istruzione di assegnazione* e si mostra come esso possa essere implementato in Excel. In particolare, si sottolinea che le celle di Excel possono essere considerate come variabili, mentre le formule inserite nelle celle svolgono il ruolo di istruzioni di assegnazione.

### Attività 2 (15 minuti)

Viene chiarito il significato delle cosiddette istruzioni di assegnazione con *riferimenti circolari*, cioè delle istruzioni di assegnazione del tipo  $t=t+\Delta t$ ; successivamente, si mostra come predisporre il foglio elettronico per ottenere la corretta interpretazione di tali istruzioni.

### Attività 3 (35 minuti)

Si ricorda in cosa consiste il problema fondamentale della dinamica (determinazione del moto partendo dalle condizioni iniziali), sottolineando come la soluzione possa essere ottenuta attraverso relazioni ricorsive.

Vengono ricavate le relazioni ricorsive per il moto di una massa in presenza di un campo gravitazionale centrale.

### Attività 4 (55 minuti)

Si guidano gli studenti nella preparazione del foglio di lavoro con cui simulare il moto di un pianeta (più in generale, il moto di un punto in presenza di forze centrali inversamente proporzionali al quadrato della distanza).

### Verifica degli apprendimenti (60 minuti)

Vengono assegnati agli studenti due problemi: il primo riguardante gli obiettivi disciplinari (determinazione del moto di un punto materiale attraverso relazioni ricorsive), il secondo relativo agli obiettivi informatici (istruzioni di assegnazione, uso di strutture d'iterazione, uso del foglio elettronico)

## Attività 1: Il foglio elettronico e le istruzioni di assegnazione

### Obiettivi:

- Richiamare il concetto di *istruzione di assegnazione*
- Essere in grado di definire ed eseguire una *istruzione di assegnazione* in Excel

Le **istruzioni di assegnazione** svolgono un ruolo fondamentale in molti linguaggi di programmazione. La prima attività proposta agli studenti intende mostrare come tali istruzioni possano essere definite ed eseguite in ambiente Excel.

L'insegnante avvia la discussione prendendo in considerazione l'espressione

$$a = \frac{F}{m}$$

che può essere interpretata come una *assegnazione* mediante la quale la variabile  $a$  assume il valore del rapporto tra le variabili  $F$  e  $m$ . Se necessario, il docente dovrà sottolineare la distinzione tra il concetto di assegnazione e la più familiare relazione di uguaglianza. A questo proposito, non è superfluo ricordare come alcuni linguaggi di programmazione rendano tale distinzione esplicita, ricorrendo a simboli diversi per i due concetti (vedi Pascal).

In Excel, possiamo considerare le celle come variabili e le formule come istruzioni di assegnazione. Ad esempio, vediamo come la formula appena considerata possa essere rappresentata nel foglio di calcolo:

	A	B	C	<u>D</u>
1	<b>Accelerazione</b>	Forza	<u>Massa</u>	
2	=B2/C2	12	2	
3				
4				

Nella figura riportata qui sopra, le celle A2, B2 e C2 possono essere viste come altrettante variabili. In particolare, possiamo immaginare che le celle B2 e C2 contengano, rispettivamente, il valore della forza applicata ad un punto e la massa del punto stesso. Se vogliamo che la corrispondente accelerazione compaia in A2, dovremo allora *assegnare* il valore B2/C2 alla *variabile* A2. A questo scopo, basterà inserire nella cella la formula “=B2/C2” e confermare con invio; in A2 comparirà immediatamente il risultato voluto, come illustrato nella figura seguente. Modificando i valori delle variabili B2 e C2, il dato in A2 viene aggiornato automaticamente.

	A	B	C	D
1	Accelerazione	Forza	Massa	
2	6	12	2	
3				
4				

## Attività 2: Istruzioni con riferimenti circolari

- Comprendere il significato delle istruzioni con riferimenti circolari
- Essere in grado di impostare una istruzione con riferimento circolare in Excel

Dopo aver richiamato il concetto di istruzione di assegnazione, l'insegnante propone agli allievi una espressione del tipo

$$t = t + 1$$

ed avvia una breve discussione sulle sue possibili interpretazioni. Se il simbolo “=” viene inteso come relazione di uguaglianza, la formula appare poco significativa (equazione impossibile); al contrario, se lo stesso simbolo viene inteso come “operatore di assegnazione”, l'espressione corrisponde ad una chiara prescrizione:

1. si calcola il valore del membro destro dell'assegnazione, utilizzando il valore di  $t$  presente in memoria
2. il valore così calcolato viene quindi attribuito alla variabile  $t$ .

Nel nostro caso, se il valore di  $t$  presente in memoria fosse  $t=4$ , l'esecuzione dell'istruzione lo modificherebbe in  $t=5$ .

I linguaggi di programmazione di tipo imperativo seguono proprio la prescrizione appena descritta, anche se possono differenziarsi per la sintassi dell'istruzione (ad esempio in Pascal si utilizza il simbolo “:=” come operatore di assegnazione).

Il passo successivo consiste nel mostrare come predisporre un foglio elettronico in modo che esso interpreti le istruzioni con riferimenti circolari.

Immaginiamo allora che la variabile  $t$  sia associata alla cella A1. Ricordando la corrispondenza tra *istruzioni di assegnazione* e *formule*, sarà necessario digitare nella stessa cella A1 il testo “=A1+1”, come indicato nella figura seguente.

	A	B	C	D
1	=A1+1			
2				
3				
4				

Fatto questo, è necessario informare Excel che intendiamo interpretare l'istruzione in modo analogo a quanto accade nei linguaggi di programmazione di tipo imperativo. A questo scopo è necessario agire su alcune impostazioni del programma :

- dal menu *Strumenti* selezionare la voce *Opzioni*
- attivare la scheda *Calcolo*
- spuntare la voce *Iterazioni*

- impostare a 1 il numero massimo di iterazioni

Per verificare l'effetto delle nuove impostazioni inseriamo nella cella A1 la formula “=A1+1” e digitiamo invio. In A1 dovrebbe comparire il numero 1, in quanto il valore delle celle è *inizializzato* a zero. Per eseguire più volte l'istruzione di assegnazione basterà premere ripetutamente il tasto F9<sup>1</sup>; ad ogni pressione il contenuto della cella A1 verrà incrementato di una unità, indicando che l'istruzione di assegnazione  $A1=A1+1$  viene interpretata come desiderato.

---

<sup>1</sup> Il tasto F9 determina l'aggiornamento dei valori inseriti nelle celle

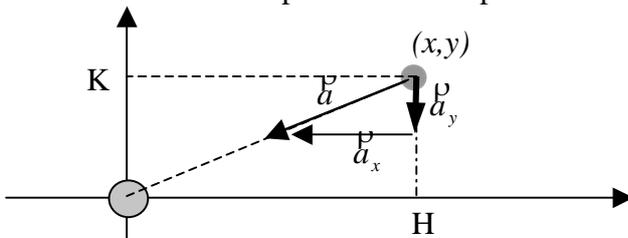
## Attività 3 - Equazioni del moto in presenza di un campo gravitazionale centrale

Scopo di questa unità didattica è richiamare alcune nozioni fisiche e matematiche che verranno utilizzate nella simulazione del moto gravitazionale. Se necessario, l'insegnante dovrà ricordare che il problema fondamentale della Dinamica consiste in quanto segue:

*Prevedere il moto dei punti materiali partendo dalla conoscenza delle cosiddette condizioni iniziali, cioè dalla posizione e dalla velocità dei punti in un particolare istante.*

Si presuppone inoltre che il docente abbia spiegato agli alunni come la soluzione delle equazioni del moto possa essere ottenuta attraverso semplici relazioni di ricorrenza, secondo quanto indicato nella [scheda per insegnanti](#) allegata.

Il sistema fisico di cui ci occupiamo è costituito da una massa (pianeta) che orbita attorno ad un centro di forza fisso (stella). Per studiare il moto del pianeta è comodo introdurre un sistema di assi cartesiani con origine nel centro di forze come illustrato in fig. 1. E' opportuno che l'insegnante ribadisca come la posizione del pianeta sia univocamente determinata dalla posizione delle



**Fig. 1**

proiezioni H e K sugli assi cartesiani; in altri termini, è importante sottolineare come il moto (piano) del pianeta possa essere analizzato studiando i moti (rettilinei) compiuti da H e K. A questo punto, l'insegnante invita gli studenti a calcolare l'accelerazione delle proiezioni H e K in funzione della posizione del pianeta. Se necessario, il docente suggerisce le semplici considerazioni di similitudine con cui ottenere la

risposta. Tenendo presente che l'accelerazione del pianeta ha modulo

$$|\vec{a}| = \frac{GM}{x^2 + y^2},$$

si ricava

$$a_x = -GM \frac{x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad a_y = -GM \frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Scegliendo opportunamente le unità di misura<sup>2</sup>, possiamo fare in modo che il prodotto  $GM$  abbia valore unitario; le precedenti relazioni diventano così:

$$a_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad a_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

<sup>2</sup> Basta assumere come unità di tempo la quantità  $\sqrt{\frac{L^3}{GM}}$  dove  $L$  è l'unità di lunghezza

Secondo quanto illustrato nella scheda per l'insegnante, la conoscenza delle accelerazioni in funzione della posizione ci consente di determinare il moto del pianeta attraverso quattro relazioni ricorsive:

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x\Delta t \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y\Delta t \end{cases}$$

Il significato e l'uso delle precedenti relazioni può forse essere chiarito da un diagramma di flusso, schematicamente riportato in fig. 2

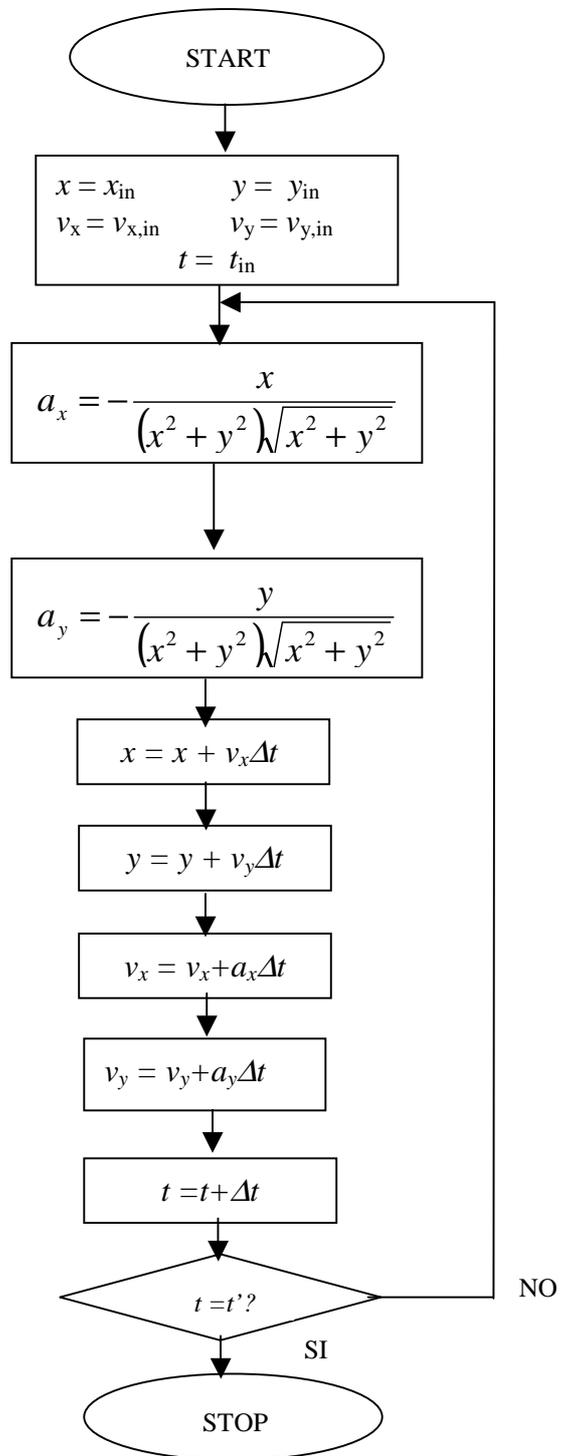
La prima fase dell'algoritmo consiste nella lettura delle condizioni iniziali, poniamo all'istante  $t$ .

Il programma calcola quindi le accelerazioni  $a_x$  e  $a_y$  corrispondenti ai valori della posizione presentata in ingresso.

Le coordinate del pianeta al tempo  $t+\Delta t$  vengono calcolate utilizzando le prime due relazioni ricorsive.

Le nuove componenti della velocità  $v_x$  e  $v_y$  vengono stimate utilizzando la terza e la quarta relazione.

La procedura viene iterata sino al raggiungimento del "tempo finale"  $t'$ .



**Fig. 2**

## Attività 4 - Soluzione delle equazioni del moto e relativa animazione

L'ultima fase della nostra unità è dedicata alla creazione di un foglio elettronico con cui simulare e visualizzare il moto di un pianeta in presenza di una forza gravitazionale centrale.

Ovviamente, è indispensabile che l'utente possa interagire con il foglio, ad esempio modificando i parametri della simulazione o variando a piacimento le condizioni iniziali del problema. Per far questo utilizzeremo una cella, ad esempio la cella A1, in cui scriveremo il numero 1 per avviare la simulazione, oppure il numero 0 per "inizializzare" il moto.

Sarà poi utile disporre di quattro celle per immettere le condizioni iniziali, cioè la posizione e la velocità del pianeta nell'istante iniziale. Stabiliamo di utilizzare allo scopo le celle B2:B5. In particolare, inseriremo nelle celle B2, B3, B4, B5 rispettivamente l'ascissa iniziale del pianeta, l'ordinata iniziale, la componente lungo  $x$  della velocità iniziale, la componente lungo  $y$  della velocità iniziale.

Una ulteriore cella, poniamo C1, verrà utilizzata per memorizzare "il passo d'integrazione"  $\Delta t$  utilizzato nelle relazioni di ricorrenza.

	A	B	C	D
1	0	$\Delta t =$	0,09	
2	$x_{\text{iniziale}} =$	1	$x(t) =$	.....
3	$y_{\text{iniziale}} =$	1	$y(t) =$	.....
4	$v_x \text{ iniziale} =$	0	$v_x(t) =$	.....
5	$v_y \text{ iniziale} =$	1	$v_y(t) =$	.....

Altre quattro celle, D2:D5, andranno utilizzate per calcolare le quattro variabili fondamentali del problema cioè le due coordinate  $x$  e  $y$  che individuano la posizione del pianeta e le componenti cartesiane  $v_x$  e  $v_y$  della sua velocità.

Focalizziamo ora la nostra attenzione sulla cella D4 e cerchiamo di stabilire la formula da inserire. Dovremo innanzitutto distinguere due casi: il caso in cui A1=0 (inizializzazione del problema) ed il caso in cui A1=1 (simulazione in corso).

Se A1 = 0 , il programma deve limitarsi a copiare in D2 la condizione iniziale inserita in B4; in D4 dovrebbe pertanto comparire la formula "**=B4**".

Al contrario, se A1 =1, Excel dovrebbe applicare la relazione ricorsiva

$$v_x = v_x + a_x \Delta t$$

che, tenendo conto dei risultati ottenuti nella precedente unità, diventa

$$v_x = v_x - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \Delta t$$

In D4 dovrebbe pertanto comparire la formula “=D4-C1\*D4/(D2^2+D3^2)^(3/2)”. In definitiva, nella cella F2 vorremmo scrivere una espressione del tipo:

$$\text{se } A1 = 0 \text{ allora } B4 \text{ altrimenti } D4-C1*D4/(D2^2+D3^2)^{(3/2)}.$$

A tale scopo, Excel contempla una *struttura di selezione* con la seguente sintassi:

$$\text{SE}(A1=0; B4; D4-C1*D4/(D2^2+D3^2)^{(3/2)})$$

Una volta chiarito come impostare il contenuto della cella D4, l’insegnante potrebbe lasciare agli studenti il compito di definire il contenuto delle celle D2, D3 e D5:

	A	B	C	D
1	1	$\Delta t =$	0,09	
2			$x =$	=SE(A1=0; B2; D2+D4*C1)
3			$y =$	=SE(A1=0; B3; D3+D5*C1)
4			$v_x =$	=SE(A1=0; B4; D4-C1*D4/(D2^2+D3^2)^(3/2))
5			$v_y =$	=SE(A1=0; B4; D5-C1*D5/(D2^2+D3^2)^(3/2))

Per maggiore chiarezza, sottolineiamo la corrispondenza tra le formule inserite nel range D2:D5 e le relazioni di ricorrenza ricavate nell’unità precedente:

- $D2 = D2+D4*C1 \Rightarrow x = x + v_x \Delta t$
- $D3 = D3+D5*C1 \Rightarrow y = y + v_y \Delta t$
- $D4 = D4-C1*D4/(D2^2+D3^2)^{(3/2)} \Rightarrow v_x = v_x + a_x \Delta t$
- $D5 = D5-C1*D5/(D2^2+D3^2)^{(3/2)} \Rightarrow v_y = v_y + a_y \Delta t$

Una volta inserite le relazioni di ricorrenza in D2:D5 , il foglio di lavoro è pronto per determinare il moto del pianeta; in particolare, ad ogni pressione del tasto F9, Excel eseguirà i calcoli indicati nelle celle, facendo così avanzare di “un passo” l’evoluzione temporale del sistema, dal tempo  $t$  al tempo  $t+\Delta t$ .

Per visualizzare il moto del pianeta con una animazione grafica, basterà semplicemente creare un grafico con un solo punto di coordinate  $x = D2$  e  $y = D3$  (cioè le coordinate del pianeta). Premendo una volta il tasto F9, i valori di tutte le celle vengono aggiornati e vedremo il pianeta compiere un passo della simulazione; tenendo premuto il tasto F9, riceveremo invece l’impressione di un moto continuo.

Ulteriori dettagli relativi alla preparazione del foglio elettronico possono essere desunti dall’esempio che alleghiamo.

La velocità dell’animazione può essere notevolmente aumentata se, per effettuare i calcoli, si utilizza una Macro in luogo del tasto F9 (vedi esempio allegato).

## Verifica degli apprendimenti

Vengono assegnati due problemi, il primo da risolversi su supporto cartaceo, il secondo da svolgere al calcolatore. Il tempo a disposizione è di 60 minuti. Per semplicità, nei problemi sono state **volutamente omesse le unità di misura**.

### Problema 1

Un punto materiale di massa  $M=1$  si muove lungo l'asse  $x$  ed è soggetto alla forza "elastica"  $F(x) = -x$ . All'istante  $t=0$ , il punto ha una velocità  $v(0) = 2$  e si trova in  $x(0) = 3$ . Assumendo che per intervalli di tempo  $\Delta t=1/10$  la velocità e l'accelerazione possano ritenersi costanti, rispondere ai seguenti quesiti :

- i) determinare la velocità del punto per  $t = 1/10$
- ii) determinare la posizione del punto per  $t = 1/10$
- iii) utilizzando i valori determinati al punto i) e ii) calcolare la velocità e la posizione della particella per  $t=2/10$ .

### Problema 2

Predisporre un foglio elettronico che simuli il moto descritto nel problema precedente

-----

### Soluzione del Problema 1

$$\text{i) } v\left(\frac{1}{10}\right) = 2 - 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{17}{10} = 1.7$$

$$\text{ii) } x\left(\frac{1}{10}\right) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{32}{10} = 3.2$$

$$\text{iii) } v\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{17}{10} - \frac{32}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{138}{100} = 1.38; \quad x\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{32}{10} + \frac{17}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{337}{100} = 3.37$$

## Scheda Insegnante - Previsione del moto attraverso equazioni alle differenze finite

Consideriamo un punto materiale che si muove (per semplicità) su una retta e poniamoci il seguente problema:

*se conosciamo la posizione e la velocità del punto in un certo istante  $t$ , come possiamo calcolare la posizione e la velocità del punto in un istante successivo  $t+\Delta t$  ?*

In base alle definizioni stesse di velocità ed accelerazione, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + \langle v \rangle \Delta t \\ v(t + \Delta t) = v(t) + \langle a \rangle \Delta t \end{cases}$$

dove  $\langle v \rangle$  e  $\langle a \rangle$  sono la velocità media e l'accelerazione media nell'intervallo di tempo  $[t, t+\Delta t]$ . Se l'intervallo di tempo è sufficientemente piccolo, i suddetti valori medi possono essere rimpiazzati dai valori istantanei della velocità e della accelerazione al tempo  $t$ :

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t \\ v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t \end{cases}$$

Se, inoltre, l'accelerazione è una funzione della posizione e della velocità (questo in sostanza è il reale contenuto della seconda legge della dinamica), le precedenti relazioni diventano

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t \\ v(t + \Delta t) = v(t) + a(x(t), v(t))\Delta t \end{cases}$$

In definitiva si osserva che la posizione e la velocità al tempo  $t$  determinano univocamente la posizione e la velocità al tempo  $t+\Delta t$ ; a questo punto, i nuovi valori delle grandezze  $x$  e  $v$  possono essere inserite nei membri destri delle equazioni, ottenendo in questo modo la posizione e la velocità al tempo  $t+2\Delta t$ . Iterando più volte la stessa procedura possiamo, in linea di principio, determinare la posizione del punto in qualunque istante  $t'$  successivo (o precedente)  $t$ .