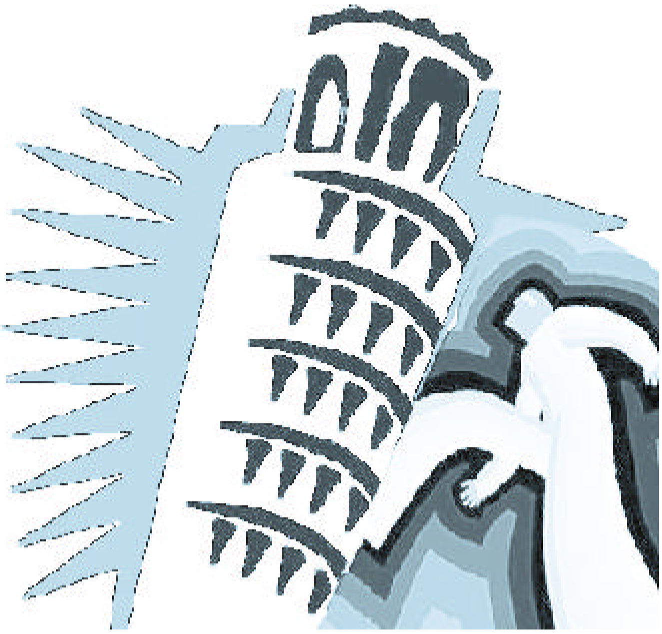
ALCUNE DIMOSTRAZIONI

UN PO' DI RIGORE IN PIÙ



Raddrizza le idee!

Nelle pagine che seguono verranno fatte solo alcune delle dimostrazioni che servono per gli argomenti trattati nelle unità. Metteremo inoltre in evidenza casi in cui le dimostrazioni per induzione funzionano bene e casi in cui invece il principio non viene utilizzato nel modo corretto.

1. Dimostrazione per induzione che bastano n-1 passi per trovare il massimo.

Per $n=2$ è vero

Infatti

$n-1=1$, con 1 passo trovo il massimo di 2 oggetti

Se è vero per n, allora è vero per n+1

Infatti supponiamo di avere trovato il massimo di

n oggetti con n-1 passi.

Se abbiamo n+1 oggetti allora procediamo così

Troviamo il massimo di n oggetti, poi basta un solo passo per trovare il massimo n+1 oggetti, perché basta confrontare l'n+1 oggetto con il massimo precedentemente trovato. Abbiamo così trovato il massimo di n+1 oggetti con n passi:

(n-1 + 1)

Questa dimostrazione funziona.

2. Dimostrazione per induzione che il numero di passi per n oggetti, N(n), deve essere superiore a n-2 : N(n) > n-2.

Per n=2 è vero

Infatti

N -1 =1 > n – 2 = 0, con 1 passo trovo il massimo di 2 oggetti ed è evidente che non posso fare meglio

Se non posso fare meglio per n, allora non posso fare meglio per n + 1

Infatti supponiamo che il numero di passi N(n) > n-2.

Se abbiamo n + 1 oggetti allora procediamo così

Troviamo il massimo di n oggetti, poi occorre (e basta) un passo per trovare il massimo di n+1 oggetti, perché è necessario confrontare l' n+1 oggetto con il massimo precedentemente trovato. Abbiamo così trovato il massimo di n + 1 oggetti con 1 passo in più rispetto al numero di passi che servono per n oggetti.

Quindi se per ipotesi

non posso trovare il massimo di n oggetti con n - 2 passi,

N(n) > n - 2 ,

ottengo che N(n + 1) = N(n) + 1 > n - 1

Non posso trovare il massimo di n + 1 oggetti con n - 1 passi.

ATTENZIONE ! QUESTA DIMOSTRAZIONE NON FUNZIONA

IMPORTANTE

La dimostrazione sopra riportata si basa su tre implicite assunzioni:

a) posso trovare il massimo di due oggetti con 1 passo, e questo è evidente.

b) posso trovare il massimo di n oggetti aggiungendo 1 passo a quelli che servono per trovare il massimo di n-1 oggetti, questo è evidente e segue immediatamente dal primo punto.

c) per trovare il massimo di n-1 oggetti devo trovare prima il massimo di n-2 oggetti.
Questo ultimo punto però non è ovvio. Infatti potrei dividere in modo diverso l'insieme, nel senso che non è detto che per trovare il massimo (o il minimo) io debba trovare il massimo e il minimo dell'insieme con un numero di oggetti inferiore.

.**Se ragiono allo stesso modo per trovare il massimo e il minimo di n oggetti, potrei dimostrare che non posso fare meglio di 2n-3 passi, ma non è così**.

Ci si potrebbe chiedere
Come mai la dimostrazione di minimalità ("lower bound").per induzione, nel caso più semplice, quello della ricerca del Massimo o del minimo, dà il risultato corretto?

Si può supporre
ELIMINARE UN ELEMENTO DEFINITIVAMENTE SCONFITTO, CHE NON PORTA PIÙ ALCUNA INFORMAZIONE, NON PUÒ PEGGIORARE LA STRATEGIA.

Oppure, meglio
SE IN UNA STRATEGIA NON PERDO INFORMAZIONE, QUESTA STRATEGIA NON PUÒ ESSERE MIGLIORATA

Quando si deve cercare il massimo in un insieme di n oggetti e si fa il primo confronto (diversamente non potrei fare per iniziare ad acquisire informazione), in quel confronto c'è un vincitore, il maggiore dei due, dell'altro non so più che farmene, non mi porta alcun tipo di informazione.
Si assume che fare un passaggio di questo tipo, gettare via l'oggetto perdente, non può in alcun modo peggiorare la strategia.
N.B. Questo passaggio non si può fare negli altri casi.

Né nel caso della ricerca del massimo e minimo, né nel caso della ricerca del I e II, c'è uno sconfitto dopo il primo confronto, quindi non si può, se voglio sfruttare tutte le informazioni che mi provengono dal primo confronto, eliminare elementi.

Mi porta informazione sia sapere che A > B sia sapere che B < A

È necessario in qualche modo tenersi tutti e due gli elementi, sia il maggiore che il minore, e proprio da questo si ha un'esplosione dell'informazione.

Nel caso del primo e secondo diventa poi rilevante, a differenza del caso del massimo e minimo, il fatto che nel primo confronto è nascosta anche l'informazione che uno precede l'altro, ed è il buttare o meno via questa informazione che fa la differenza con l'altro caso.

N.B. L'INFORMAZIONE ESPLODE E DIVENTA MOLTO DIFFICILE DA GESTIRE

L' ipotesi è che nel caso più semplice il principio di induzione funzioni proprio perché non c'è interazione tra le informazioni.

Utilizzando il metodo di gettare via un oggetto dopo il primo confronto, ci si ritrova dopo il primo passaggio con un insieme che ha un oggetto di meno ma che si trova nelle stesse identiche condizioni di totale mancanza di informazioni in cui si trovava il primo.

Ha senso quindi che si possa procedere sempre nello stesso modo, gettando via sempre l'oggetto minore, e confrontando il massimo precedente quindi con un qualunque oggetto tra quelli rimasti.

Procedendo in questo modo, ad ogni passaggio individuo il massimo di un insieme con un elemento in più:

Innanzi tutto ho trovato il massimo di due, poi il massimo di tre, fino ad arrivare a confrontare il massimo dell'insieme di n-1 elementi con l'ultimo oggetto rimasto.

Si può ragionevolmente concludere che non può esserci un metodo migliore perché non si è mai sprecato informazione, in nessun passaggio.

Un singolo confronto può portare con sé più di una informazione, si può vedere come un atomo composto di particelle, il numero delle particelle varia a seconda del problema.

Oppure si potrebbe dire che è un atomo con un numero fisso di particelle di informazione, ma a seconda del problema alcune servono, le posso utilizzare, ed altre non servono allo scopo.

È UN CONCETTO PIÙ PRIMITIVO L'INFORMAZIONE PIUTTOSTO CHE IL CONFRONTO, anche se è vero che si è acquisita informazione tramite il confronto.

Quanto detto sopra è un ragionamento non rigoroso.

Si basa su intuizioni e sull'importante ruolo che ha l'informazione e che in questo semplice caso è facile riconoscere.

Non ci si può però basare in generale su questo, infatti l'informazione non è facilmente riconoscibile e dominabile.

Si può fare una dimostrazione rigorosa usando il principio del minimo intero, che è equivalente all'induzione.

Sia n_0 il minimo intero che non è 1 per cui esiste un algoritmo che fa meno di n_0-1 confronti per trovare il massimo.

Possiamo allora applicare tale algoritmo a n_0 -1 elementi, semplicemente saltando i confronti che coinvolgono l'elemento n_0-esimo.

Ci deve essere almeno un confronto che coinvolge l'elemento n_0-esimo, altrimenti l'algoritmo non sarebbe corretto nel caso in cui n_0 fosse il massimo.

Abbiamo quindi trovato un algoritmo che trova il massimo di n_0-1 elementi facendo meno di n_0-2 confronti.

Assurdo poiché n_0 era il minimo intero che soddisfaceva tale proprietà.

Dimostrazione che non si può fare meglio di n-1 per la ricerca solo del Massimo o solo del minimo (senza utilizzare il principio di induzione).

Se in un insieme di n oggetti devo trovare ad esempio il Massimo, avrò un vincitore.

Questo implica che ci siano n-1 sconfitti.

Dato che per poter essere sconfitti ci vuole almeno un confronto, devono essere stati fatti almeno n-1 confronti.

Si può poi dimostrare che non può esserci che un vincitore, o, è lo stesso, dimostrare che ogni elemento diverso dal massimo deve uscire sconfitto.

L'unico modo per dimostrare ciò è infatti:

se un elemento diverso dal massimo non uscisse mai sconfitto, ci sarebbero allora 2 elementi che non uscirebbero mai sconfitti.
Ma allora l'algoritmo dovrebbe sempre scegliere uno solo di questi due e sarebbe dunque scorretto nel caso in cui il massimo fosse quello non scelto.

UNA DIMOSTRAZIONE DIFFICILE

DIMOSTRAZIONE CHE NON SI PUÒ FARE MEGLIO DI [3/2*n] – 2

Gli oggetti dell'insieme che hanno giocato, e quindi hanno subito almeno un confronto, dopo k confronti, sono distribuiti in tre gruppi, M_K m_K E_K

1. In un gruppo, M_K, si mettono quelli che hanno sempre vinto, quindi forse massimi, certamente non minimi: M_k = numero degli elementi che hanno sempre vinto.
2. In un gruppo, m_K, si mettono quelli che hanno sempre perso, quindi forse minimi, certamente non massimi: m_k = numero degli elementi che hanno sempre perso.
3. In un gruppo, E_K , si mettono quelli che hanno sia vinto che perso, quelli fuori gioco: E_k = numero degli eliminati

Affinché sia vero che la formula sia $k >= [(3n)/2] - 2$ e sapendo che alla fine avremo un solo massimo, un solo minimo, n-2 elementi che non sono né massimi né minimi, e sapendo che gli eliminati devono avere subito almeno due confronti, si può forse riuscire a congetturare che bisogna dimostrare che il numero degli elementi, che hanno giocato almeno una volta, sia distribuito in modo tale che per ogni k <= numero di confronti necessari per arrivare al risultato deve essere valida la formula

$$m_k + M_k + 3E_k <= 2k$$

infatti
quando il m e il M sono stati determinati allora si ha

$1 + 1 + 3*(n-2) <= 2k$ da cui

a) se n è pari

k >= 3/2*n – 2

b) se n è dispari

dato che k è intero

k >= [3/2*n] – 2 (bisogna approssimare (3n/2) per eccesso)

Es. se 15<= 2k e k è un numero intero, k non può essere maggiore o uguale a 7, 2*7 non sarebbe superiore o uguale a 15

DIMOSTRAZIONE

I. È vero per k = 1

Infatti dopo il primo confronto ci sono due oggetti in tutto uno in m_k e l'altro in M_k

1 + 1 + 0 <= 2*1

II. HP : $m_k + M_k + 3E_k <= 2k$

TH : $m_{k+1} + M_{k+1} + 3E_{k+1} <= 2(k+1)$

Dimostrazione del punto II

Se ai k confronti effettuati ora si aggiunge un confronto, si possono ottenere vari casi.
Bisogna considerarli tutti, perché sono i vari modi in cui posso procedere nell'effettuare i confronti.
Se dovessi trovare che in uno di questi modi tutti i possibili esiti non soddisfano la formula con certezza, vorrebbe dire che non è detto che io non possa fare meglio.

Però per ogni caso considerato basta che soddisfi uno dei sottocasi. I sottocasi non sono altro che i possibili esiti dei confronti: basta che uno di questi sia tale da verificare la formula che mi basta per dire che meglio non posso fare anche procedendo in quel particolare modo.
Se invece accadesse, come detto sopra, che in uno dei casi che seguono (per qualche punto dell'elenco può esserci più di un caso) tutti i possibili esiti fossero tali da non verificare con certezza la formula, allora non potremmo essere certi di non potere fare meglio.

a. Si confrontano due elementi di M_K o di m_K

Uno dei due esce dal gruppo e va in E_K

$(m_k-1) + M_k + 3(E_k + 1) <= 2(k + 1)$

è verificato dato che $m_k + M_k + 3E_k <= 2k$, quindi

3. $m_k + M_k + 3E_k + 2 <= 2(k + 1)$
4. $m_k + (M_k-1) + 3(E_k + 1) <= 2(k + 1)$
5. verificato per lo stesso motivo di prima

b. Si confrontano due elementi E_K

(Caso inutile dato che non ha senso confrontare tra loro due eliminati)

Niente cambia: $m_{k+1} = m_k$, $M_{k+1} = M_k$, $E_{k+1} = E_k$

$m_k + M_k + 3E_k <= 2(k + 1)$ a maggior ragione vero

c. Si confrontano due elementi uno di m_k e uno di M_k

(Caso inutile dato che si è certi che il minimo starà in m_k e il massimo in M_k)

Potrebbe accadere che niente cambi , nel senso che l'elemento di m_k risulta minore dell'elemento di M_k

$m_k + M_k + 3E_k <= 2(k + 1)$ verificato (basta questo sottocaso)

oppure che ambedue vadano in E

$(m_k – 1) + (M_k – 1) + 3(E_k +2) <= 2(k + 1)$

disuguaglianza non verificata con certezza, infatti questo è un esito fortunato, con un confronto ne elimino addirittura due

d. si confrontano due elementi, uno di m_k e uno di E_k, oppure uno di M_k e uno di E_k

(Caso inutile dato che non ha senso fare confronti con gli eliminati)

Potrebbe accadere che niente cambi

$m_k + M_k + 3E_k <= 2(k + 1)$ verificato (basta questo sottocaso)

oppure che uno vada in E_k

$(m_k – 1) + M_k + 3(E_k +1) <= 2(k + 1)$ verificato

$m_k + (M_k – 1) + 3(E_k +1) <= 2(k + 1)$ verificato

e. Si confrontano due elementi uno aggiunto con uno di m_k , o con uno di M_k , o con uno di E_k.

(quest'ultimo confronto con un eliminato non ha senso)

aumenteranno m_k o M_k oppure E_k di una unità

a) $(m_k + 1) + M_k + 3E_k <= 2(k + 1)$ verificato

quando l' elemento aggiunto perde con M_k o perde con E_k

b) $m_k + (M_k+1) + 3E_k <= 2(k + 1)$ verificato

quando l' elemento aggiunto vince con m_k o vince con E_k

c) $m_k + M_k + 3(E_k +1) <= 2(k + 1)$ non verificato

quando l' elemento aggiunto perde con m_k o vince con M_k

Non importa se il caso c) non soddisfa, mi basta che ci sia un possibile esito che soddisfi la formula .

Il caso c) rappresenta uno dei possibili esiti del confronto dell'aggiunto con m_k, o con M_k . Rappresenta il caso più fortunato, quello con il quale si potrebbe fare un minor numero di confronti, infatti con un confronto in più viene eliminato un elemento, cosa che non accade per gli altri possibili esiti.

PER CONCLUDERE:

tutti i possibili casi e i loro possibili esiti soddisfano la formula se si escludono due situazioni, che sono però due esiti possibili, ognuno per un caso diverso, gli altri esiti degli stessi due casi soddisfano la formula, quindi la formula è soddisfatta anche per quei due casi, *CVD*

Quindi abbiamo dimostrato che per ogni numero di confronti, da uno fino al risultato, comunque vengano effettuati, la formula è soddisfatta e quindi il numero degli elementi a sinistra sarà <= del doppio del numero dei confronti.

invece nei casi fortunati il numero degli elementi di sinistra potrebbe essere anche maggiore del doppio dei confronti effettuati.

DETERMINAZIONE DEL *I* E *II* MASSIMO DI UN INSIEME CON IL METODO MIGLIORE

3. Dimostrazione che anche con questo metodo è *n- 1* il numero di passi per trovare il *I*

N.B. in queste pagine con log si intende il logaritmo in base 2.

Primo caso:

supponiamo che n sia una potenza di 2.

Il massimo dell'insieme si trova in n-1 passi, infatti:

$n/2 + n/4 + ... + n/2^{\log n} = n/2 + n/4 + ... + n/n = n*(1/2 + 1/4 + ... 1/2)$

Se poniamo logn = h si ha che $2^h = n$

$= n*(2^{h-1}/n + 2^{h-2}/n + ... 2^2/n + ... 2^0/n) = n*(2^h – 1)/n = n – 1$

Secondo caso:

supponiamo che *n* non sia una potenza di *2*.

Ogni numero si può scrivere come somma di potenze di 2, e le divisioni che devo effettuare hanno come primo divisore 2 e poi continuano fino alla divisione per la potenza di 2 più vicina al numero n, minore di n.

Esempio n. 1

126 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 26 (5 resti)

Ogni numero si può scrivere, in un solo modo, come somma di potenze di 2 (secondo quanto è stato detto nella terza unità)

Se è pari

$n = 2^h + 2^k + ...$ (nessun esponente di 2 assumerà il valore 0)

Se è dispari

$n = 2^h + 2^k + ... + 1$

Quando divido ripetutamente un numero per due, ottengo un numero di resti pari al numero delle potenze di due coinvolte meno 1, dato che la divisione per due arriva fino alla potenza di due più vicina al numero. Se è coinvolta una sola potenza di due allora non ci sono resti, altrimenti la seconda potenza di due da già un resto.

- In pratica è come scrivere il numero in base 2

Esempio: 126

(64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2)/2 + (64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2)/4 + ... + (64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2)/64

1111110

I resti sono pari ai posti occupati da 1, meno la prima unità, e cioè i resti sono psri alle divisioni per due non esatte

- Ogni resto rappresenta un passo in più.

Un resto si ha facendo la divisione per 2 ad un certo livello. Se c'è un resto significa che avanza un elemento che posso pensare di confrontare con il massimo o con un resto successivo e così facendo un resto significa un passo in più in ambedue i casi : nel secondo caso due resti danno un confronto e un elemento in più che passa al livello superiore e genera un nuovo confronto, o con un altro resto o con il massimo, nel primo caso ogni confronto in più con il massimo trovato, senza considerare i resti, dà un confronto in più.

Il calcolo del numero dei livelli resta quello già indicato nella prima unità che è riportato di seguito.

Il numero degli elementi che hanno vinto con il massimo è pari all'esponente che bisogna dare a 2 per ottenere il numero, e cioè logn.

Per trovare poi il massimo tra queste servono logn – 1 passi, dove il logn è approssimato per eccesso, perché qualora il numero degli oggetti di un livello non sia divisibile per 2, cioè il numero non è una potenza esatta di 2, basterà approssimare per difetto, lasciando da parte un oggetto che verrà confrontato con il primo che resta solo e questo farà aumentare di un livello l'albero.

Non sarà certamente più di un livello, perché ogni livello aumenta al più di un elemento che fa aumentare il numero delle coppie al più di una, quindi questo incide solo all'ultimo livello della potenza di due più vicina per difetto, quando l'ultimo elemento si potrebbe dover confrontare con un elemento "avanzato" e quindi far salire di un livello l'albero.

$2^h < n < 2^{h+1}$

dove h è un numero intero, e se

logn = r $\qquad$ h < r < h+1

esempio: $\qquad \log_2 10 = r \qquad\qquad 3 < r < 4$

h rappresenta il numero dei livelli per un numero che è esprimibile come una potenza di 2 ad esponente intero, come $\qquad 8 = 2^3 \qquad h = 3$

Tra 9 e 16 il numero di livelli sarà 4 e così via.

CONCLUDENDO

Il numero di confronti sarà pari al numero di passi che servono per trovare il massimo, n-1, aumentato del numero di passi che servono per trovare il secondo, e cioè il massimo tra gli elementi che hanno perso con il massimo, numero di passi pari quindi al numero di livelli h diminuito di 1, cioè h – 1:

Numero di confronti = n/2 + n/4 + ... + 1 + logn – 1 = n-1 + logn-1

Il logaritmo è da intendersi in base 2, viene approssimato per eccesso quando il numero non è una potenza esatta di 2.

ALTRI POSSIBILI RAGIONAMENTI

Se il numero non è una potenza esatta di 2 si può procedere così:

- si scrive il numero come somma di potenze di 2 (quindi si scrive il numero in base 2)
- Si considera il numero come somma di queste potenze, dividendo per due è come se si trovasse il massimo in ognuno di questi casi.
- Poi bisogna trovare il massimo tra i massimi

Per trovare il massimo tra i massimi si procede ancora scrivendo il numero dei massimi in base 2 e poi ancora in base 2 fino ad arrivare ad una potenza esatta di due di cui so già calcolare il massimo:

1111110	6 potenze di due	(6 = 110)
110	2 potenze di due	(2 = 10)
10	1 potenza di due	

1111110 si può pensare come la somma delle seguenti potenze di due.

1000000 63 passi

100000	31 passi
10000	15 passi
1000	7 passi
100	3 passi
10	1 passo

in tutto 120 passi

6 potenze di 2,

$6_{10} = 110_2$ si può pensare coma la somma delle seguenti potenze di due

100	3 passi
10	1 passo

in tutto 4 passi

2 potenze di 2,

$2_{10} = 10_2$ si può pensare coma la somma delle seguenti potenze di due

10	1 passo

in tutto 1 passo

TOTALE 125 PASSI

Se consideriamo il numero come somma di potenze di 2

$n = 2^h + 2^k + ...$

e troviamo il massimo di 2^h e di 2^k etc troviamo tanti massimi provvisori quante sono le potenze di due che intervengono e poi troviamo il massimo tra i massimi trovati con lo stesso procedimento, fino ad arrivare ad una potenza di 2 che alla peggio è 2^0

$n = 2^h + 2^k + ...$

numero confronti: $(2^h - 1 + 2^k - 1 + ...) + (2^l - 1 + 2^m - 1 + ...) + ... +$ numero (potenza di 2) - 1

Il numero degli 1 della prima parentesi è proprio pari al numero delle potenze di 2 coinvolte e quindi è pari a $2^l + 2^m + ...$

Si ottiene quindi

n – numero di potenze di due coinvolte in n + numero delle potenze di due coinvolte in n – numero delle potenze di due coinvolte nel numero delle potenze di due + numero delle potenze di due coinvolte nel numero delle potenze di due - ...numero delle potenze di due coinvolte nel numero delle potenze di due coinvolte nel numero delle potenze di due ... +

In sintesi se il numero delle potenze di due coinvolte sono i

Numero confronti = $(2^h + 2^k + 2^{l + \cdots} - i) + (i-1) = n-1$

Infatti per i massimi provvisori ottenuti si rifà lo stesso ragionamento

---

Consideriamo ora il numero di confronti per trovare il *II* e cioè i livelli dell'albero dell'unità sul Confronto.

Considerare il numero somma di potenze di due e trovare il massimo per ogni potenza di due e poi trovare il massimo tra tutti i massimi.

Devo considerare i livelli dell'albero

esempio

20 = 16 + 4

Trovo un massimo dall'albero del 16 e un massimo dall'albero del 4, confronto i due massimi finali. Questo accade sempre.

Uno dei due vince, allora considero quel livello, cioè un elemento a quel livello, più i livelli del massimo che ha vinto, quelli del 16 o quelli del 4, nel caso più sfortunato quelli del 16.

Anche questo vale in generale.

Il caso più sfortunato è quello in cui si devono considerare i livelli dell'albero della maggiore potenza di due, quindi ho in totale h + 1 elementi che hanno perso con il massimo, e quindi h passi per trovare il secondo massimo.

CONCLUSIONE

n-1 passi per trovare il massimo

h + 1 – 1 passi per trovare il secondo massimo

h + 1 è il log in base 2 approssimato per eccesso del numero che non è potenza di 2.

Totale numero passi = $n - 1 + \log_2 n - 1$ (il logaritmo approssimato per eccesso)

L'esempio fatto non è un caso particolare che non vale in generale, infatti ci si riconduce sempre al caso dell'esempio sopra riportato se, dopo aver scritto il numero come somma di potenze di due, lo si divide per due, e quindi si considerano da una parte gli alberi delle potenze di due inferiori e dall'altra l'albero della maggiore potenza di due che compone il numero..

Un altro esempio per capire meglio

SETTE ELEMENTI

7 = 4 + 2 + 1

Abbiamo quindi 7 elementi che potrebbero essere

A B C D E F G

A C E

A

Ci troviamo separatamente il massimo dell'albero maggiore e per l'insieme degli alberi minori facciamo ripetutamente la stessa cosa, l'albero maggiore da una parte, gli altri dall'altra, e poi risaliamo.

Il massimo dell'albero più grande verrà confrontato con l'unico massimo saltato fuori dagli alberi più piccoli.

In questo modo ottengo

- 3 passi per trovare il massimo dell'albero del quattro
- 1 passo per il massimo dell'albero del due
- 0 passi per l'albero dell'1
- 1 passo per confrontare i due massimi degli alberi del due e dell'uno.
- 1 passo per confrontare il massimo dell'albero del quattro con l'altro massimo

Restano i due elementi che hanno perso con il massimo nell'albero del quattro e l'ultimo elemento che ha perso con il massimo, in tutto tre elementi, quindi

- due passi per trovare il massimo dei tre elementi che hanno perso con il massimo

IN TOTALE 6 + 2 = 8 confronti

CONSIDERAZIONI VARIE

➢ PER TROVARE IL MASSIMO POSSO PROCEDERE IN DUE MODI

1. trovando il massimo di ogni albero e poi trovando il massimo tra tutti i massimi

   mi verrà sempre un numero di passi pari a

   $$\underbrace{2^h - 1 + 2^k - 1 + 2^t - 1 + \ldots}_{p volte} + p - 1 = 2^h + 2^k + 2^t + .. - 1 = n - 1$$

   dove p è il numero delle potenze di 2

2. trovando il massimo dell'albero maggiore e il massimo di tutti gli altri con lo stesso procedimento, fino a confrontare gli ultimi due massimi.

   Il numero di passi per trovare il massimo sarà sempre pari a n – 1 e si può dimostrare utilizzando il principio di induzione.

➢ PER TROVARE IL MASSIMO E IL SECONDO, NON POSSO PROCEDERE CHE NEL SECONDO MODO DESCRITTO, PERCHÉ CON IL PRIMO METODO OTTENGO PASSI IN PIÙ

Per trovare il secondo infatti, se trovo inizialmente i massimi di ogni albero e poi il massimo tra i massimi, sono in gara per il secondo posto tanti elementi quanti i livelli dell'albero della maggiore potenza di 2, e inoltre devo considerare anche quelli che hanno perso con il massimo nei confronti tra i massimi provvisori.

Consideriamo l'esempio precedente di 7 oggetti:

6 passi per il massimo

3 passi per il II (in 4 hanno perso con il massimo, 4 – 1 passi per trovare l massimo tra questi)

IN TOTALE

9 passi (confronti)

UN CONFRONTO IN PIÙ, PER 7 OGGETTI, RISPETTO AL METODO PRECEDENTE.

4. Dimostrazione della proprietà che il numero di possibili pesate che si ottengono per la base 2, è in generale pari al numero di pesi che si ottengono partendo dal più piccolo, 1, fino al più grande possibile, 2^n - 1, con una differenza di 1.

$$I = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$$

P(I) = insieme delle parti di I

TESI $$\sum_{I=0}^{N} \binom{n}{i} - 1 = \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = P(I) - 1 = 2^n - 1$$

Si dimostra ricordando che per la formula del binomio di Newton si ha:

$$(1+1)^n - 1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} - 1 = 2^n - 1$$

5. Dimostrazione della proprietà che il numero di possibili pesate che si ottengono per la base 2, è in generale pari al numero di pesi che si ottengono partendo dal più piccolo, 1, fino al più grande possibile, 2^n - 1, con una differenza di 1.

TESI $$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

Si utilizza il principio di induzione e la terza proprietà dei coefficienti binomiali

1. Per n = 1 è immediato

2. Se è vero per n allora è vero per n + 1

Ipotesi $\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n-1$

Tesi $\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}-1$

Terza proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

Applicando la terza proprietà si può notare che si ha

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n+1}=$$
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+\binom{n}{n}-\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n+1}=$$
$$1+2*(2^n-1)-1+1=2^{n+1}-1$$
$$c.v.d.$$