Albero per l’ordinamento di tre (A B C) oggetti.

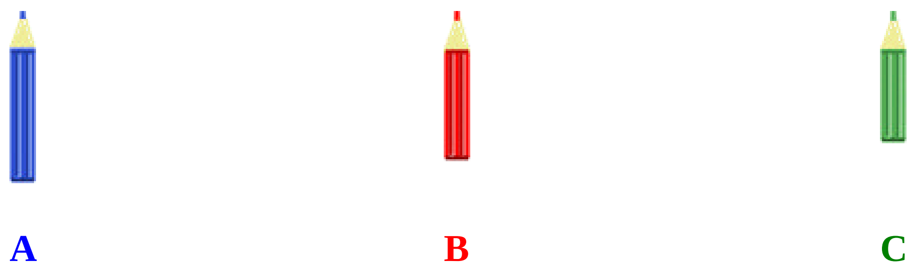
In questa lezione analizzeremo i procedimenti di ordinamento con particolare riguardo verso il minimo numero dei confronti da operare per ordinare n oggetti arbitrari.
Cominciamo.

Ordinamento: cosa si intende fare?

Si immagini di avere alcune matite sul tavolo e di volerle mettere in fila in ordine crescente di lunghezza. Avremo alcuni oggetti (le matite) aventi una caratteristica che le differenzia (l’altezza) misurabile da noi che dobbiamo, **confrontandoli a due a due**, porre uno prima e uno dopo in una sequenza ordinata che segua una certa regola: in questo caso la regola è che quello prima deve essere più corto di quello dopo.
Questa è l’operazione di ordinamento.
La serie di confronti operati per completare l’ordinamento, far sì cioè che tutti gli oggetti rispettino la regola, viene chiamato algoritmo di ordinamento.

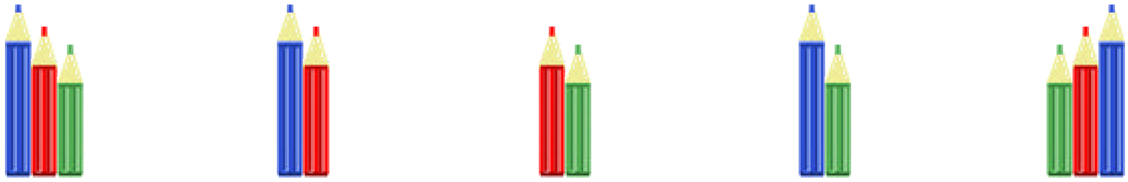
L’Algoritmo.

Presentiamo ora un esempio concreto: l’ordinamento delle tre matite in figura.
Chiameremo la **matita blu A**, la **matita rossa B** e la **matita verde C**.



Qual è il procedimento attraverso il quale siamo in grado di ordinare **A B e C** partendo da qualsiasi configurazione iniziale? Il nostro cervello lo fa automaticamente ma quali sono le singole operazioni che esso fa nell’atto di ordinare le tre matite?
Opera semplicemente dei confronti binari.
Mi spiego.
Per decidere l’ordine delle matite (deve essere crescente) si devono confrontare a due a due tutte le matite fra loro e cioè: confrontare l’altezza di **A** e **B**, **B** e **C** e infine **A** e **C**. Unendo i responsi di questi tre confronti siamo in possesso di tutte le informazioni necessarie a determinare la sequenza esatta.

Questi di seguito sono tre schemi che visualizzano il procedimento:



Situazione iniziale: le matite non sono in ordine crescente.	Primo confronto (A e B): A è maggiore di B e quindi sarà posizionato dopo di B.	Secondo confronto (B e C): B è maggiore di C e quindi sarà posizionato dopo di C ma prima di B.	Terzo confronto (A e C): A è maggiore di C e quindi sarà posizionato dopo di C e B.	Situazione finale: ora sfruttando le informazioni dei confronti le matite possono essere messe in ordine crescente.

Figura 1

A > **B**	Primo confronto (A e B): A è maggiore di B e quindi sarà posizionato dopo di B.
B > **C**	Secondo confronto (B e C): B è maggiore di C e quindi sarà posizionato dopo di C ma prima di B.
C < **A**	Terzo confronto (A e C): A è maggiore di C e quindi sarà posizionato dopo di C e B.

La soluzione sarà
C B A

Figura 2

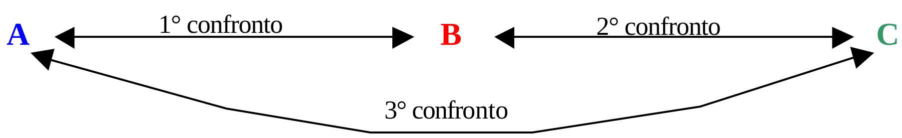


Figura 3

Si può fare di meglio?

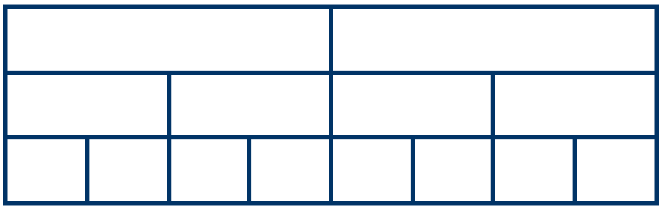
Abbiamo illustrato un' algoritmo con cui si arriva alla soluzione. Ma è davvero il migliore? Si può arrivare alla soluzione con meno confronti?
Proviamo a dimostrare che il minimo numero di confronti per ordinare tre oggetti è tre.
Si possono rappresentare tutti i passaggi possibili scrivendo tutti i possibili risultati dei confronti:

A<B				A>B			
B<C		B>C		B<C		B>C	
A<C	A>C	A<C	A>C	A<C	A>C	A<C	A>C

Soluzioni

ABC	**NON ACC**	**ACB**	**CAB**	**BAC**	**BCA**	**NON ACC**	**CBA**

Come è evidente il numero di possibili soluzioni (cioè il numero di permutazioni del gruppo di oggetti), che si calcola con il fattoriale del numero di oggetti, in questo caso è sei: ABC, ACB, CAB, BAC, BCA, CBA.
Come si può notare ogni strato rappresenta un confronto che verrà effettuato durante l'elaborazione, e le sue colonne le possibilità derivate dal confronto: queste ultime sono per ogni strato una potenza di due; più precisamente ogni strato successivo contiene una successiva potenza di due di numero di colonne.



Strato 1 (1°confronto): 2^1 possibilità derivate dal primo confronto (2^1 colonne)
Strato 2 (2°confronto): 2^2 possibilità derivate dal secondo confronto (2^2 colonne)
Strato 3 (3°confronto): 2^3 possibilità derivate dal terzo confronto (2^3 colonne)

L'ultimo strato rappresenta l'ultimo confronto e ad ogni sua colonna corrisponde l'ultimo responso dei confronti, quello cioè che ci permette di scegliere la giusta sequenza: il numero di colonne dell'ultimo strato è anche quello delle possibili soluzioni.
Se operassimo soltanto due confronti l'ultimo strato comprenderebbe quattro colonne e cioè quattro soluzioni ma le soluzioni possibili con tre oggetti sono sei: risulta impossibile quindi ordinare tre oggetti con meno di tre passaggi.

E con n oggetti?

Abbiamo osservato dunque che il numero di soluzioni deve essere minore o uguale al numero di colonne dell'ultimo strato: generalizzando possiamo dire che

$$2^{c}\ {}^{3}\ n!$$

dove n è il numero di oggetti e c è il numero di confronti.
Calcolando il minor valore di c si arriva al minimo numero di confronti per decidere la sequenza esatta degli oggetti.

In conclusione ho concluso che ho finito di concludere.

Emanuele