DALLE PESATE ALL' ARITMETICA FINITA IN BASE 2

Si è trovato, partendo da un problema concreto, che con la base 2, utilizzando alcune potenze della base, operando con solo addizioni, posso ottenere tutti i numeri dal più piccolo, 1, al più grande 2^n-1, dove n è il numero delle potenze in base 2 utilizzate, e 2^n è la prima potenza esclusa.

Supponiamo di avere i seguenti pesi campione, e cioè le prime tre potenze della base del sistema scelto

	1	10	100,
e cioè	1	2	4

posso ottenere i pesi 1 2 3 4 5 6 7

trasformando la sottrazione dell'esempio precedente

4 + 2 – 1 = 4 + 1

in somma all'opposto, ottengo

100 + 010 + 111 = 100 + 001

dove al posto di 1 ho messo 7, cioè il complemento a 8.

Quindi

4 + 2 + 7 = 4 + 1,

13 = 5 infatti 13 mod 8 = 5

Con 8 si ricomincia da capo, 8 mod 8 = 0

In pratica

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
-7	**-6**	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**

Cioè

1 = -7 e così via infatti 8 = 0 …

Siamo così arrivati all'aritmetica modulare, ma anche a individuare alcuni aspetti di come funziona l'aritmetica del calcolatore come vedremo.

Come trovare l'opposto di un numero

1. Primo esempio l'opposto di 1

1 = 001 → con il complemento a 2 di ogni cifra (se si tiene conto del riporto) si ottiene 111, poi bisogna togliere 1000, quindi

001 → 111

inoltre ottengo

100 + 010 + 111 = 1101

Dato che i numeri occupano tre bit il numero 1101 diventa 1101 - 1000 = 101, anche se l'ultima operazione non viene eseguita dato che l'ultimo riporto non è registrato, memorizzato. Questo è quello che accade nella memoria del computer

2. secondo esempio trovare l'opposto del numero 2, di un numero che finisce per 0,

un caso più complicato di complemento a 2.

Se ho 010 allora il complemento a 2 è 110, infatti il complemento a 2 di 0 è 2, cioè 10, il riporto mi dà già 2 con la seconda cifra, quindi riporto di nuovo 1, quindi il complemento a 2 nel terzo posto è 1.

3. come rendere i passaggi più semplici

Si può ragionare così :

scambiare gli 1 con 0 e gli 0 con 1, e poi aggiungere 1.

001 → 110 + 1 = 111

010 → 101 + 1 = 110

Con il complemento a 2 o con il secondo metodo è più facile trovare l'opposto positivo del numero

IMPORTANTE

Se si passa dalla bilancia ai sistemi di numerazione, si può porre anche il problema di poter fare sottrazioni del tipo

(1) 3 – 5 = -2

Si ottiene

(2) $3 + 3 = 6$ $(6 = -2)$,

che è diverso da

(3) $4 + 2 – 1 = 4 + 1$ che diventa (4) $4 + 2 + 7 = 4 + 1$

infatti, mentre l' operazione (3) può essere tradotta in una misura con la nostra bilancia, le operazioni (1) (2) e (4) non hanno senso, soprattutto la (1) e la (2)

Nei casi sopra esaminati abbiamo abbandonato il problema da cui siamo partiti, nel senso che lo zero, i numeri negativi, in quel problema pratico non hanno il senso che è stato attribuito in questo paragrafo.

Però quanto detto sopra, che ha avuto inizio nel tentativo di trovare il miglior tipo di pesi campione, acquista un significato nuovo, se pensiamo ad un'aritmetica circolare

$1 – 2 = 1 + 6$

ha un senso preciso

nell'ARITMETICA

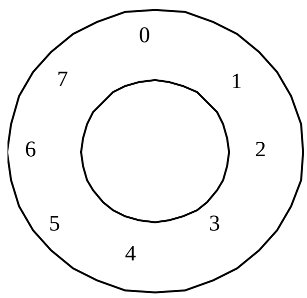
DELL'OROLOGIO

Se faccio $3*-2 = -6 = 2$

Posso pensarlo come

$- (3*2) = - (3 + 3)$ e arrivo infatti a 2

e così via ...



Con il meno ci si muove, per esempio, in senso antiorario, partendo in questo caso da 1, con il più ci si muove in senso orario

DALLE PESATE ALL' ARITMETICA FINITA IN BASE 3

Il numero 5, e così un qualunque altro numero compreso tra 1 e 13, si può ottenere solo in un modo

9 – 3 - 1 = 5

9 + 24 + 26 = 59

59 mod 27 = 5

Se si sostituiscono i numeri negativi come segue

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

-13 –12 –11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1

si ottiene che i numeri tra 14 e 26 sostituiscono i numeri negativi.

(N.B. 14 + 13=27 e così di seguito)

Ora utilizzo tutti i numeri tra 1 e 26 e

NON HO RIDONDANZA

perché il 5 lo posso ottenere solo facendo 9 + 24 + 26 e così gli altri numeri diversi da 0

Non ho ridondanza se si esclude lo zero,

lo zero lo posso ottenere in 13 modi

1 + 26 = 2 + 25 = 3 + 24 = 4 + 21 = … = 13 + 14

La somma di due numeri opposti mi dà lo zero

N. B. Se utilizzo la bilancia non posso ottenere lo zero, perché non posso ripetere i pesi campione (posso utilizzare o 3^n o -3^n.

Se poi devo effettuare la sottrazione

1 – 3 = -2 quindi 1 + 24 = 25

non si presenta il problema che si presentava con la base 2.

Infatti mentre prima gli stessi numeri potevano essere considerati positivi o negativi, ora c'è una precisa distinzione, e non è necessario introdurre i due versi di percorrenza, per dare un senso, perché il numero 25 non lo posso ottenere anche utilizzando i pesi campione, ma solo utilizzando uno dei "numeri virtuali" da 13 a 26.

Se però disponiamo i numeri su un orologio, come abbiamo fatto con i numeri in base 2, si vede che funziona allo stesso modo dell'orologio in base 2, con la sola differenza che l'orologio in base 2 opera con i pesi campione, qui invece dobbiamo aggiungere numeri non ottenibili con i pesi campione, e la ridondanza non si ottiene se si utilizzano i numeri virtuali e non si ha la possibilità di ripetere i pesi campione..

3 – 1 = 2

3 + 26 = 29

5 + 24 non posso farlo perché utilizzo più di una volta il 3

5 – 3 = 9 –3 - 1 -3

Esempio

26 cioè –1 non posso ottenerlo in altri modi, neanche utilizzando i due versi di percorrenza dell'orologio.

1 – 2 = 1-3 +1 non posso

2-3 = 3 –1 –3 non posso

1 – 3 = -2 = 1 + 24 = 25 questo caso funziona e non posso ottenerlo in altri modi, se devo rifarmi sempre ai pesi campione senza ripetizione.

Invece in base 2, il –1 e il –2 li posso ottenere in più modi

1 – 2 = (dato che è1 + 6) = 1 + 4 + 2 = 7

utilizzando i pesi campione e i due versi di percorrenza, analoghi d'altronde alle addizioni e sottrazioni, all'addizione algebrica, dato che abbiamo l'opposto di ogni numero.

2 – 4 = -2 = 6

2 + 4 = 6 = -2 sempre utilizzando solo pesi campione

Se invece considero possibili anche le ripetizioni dei pesi campione le cose cambiano e c'è ridondanza perché posso ottenere i numeri interi in più modi!

5 = 1 + 4 = 2 + 3 etc

7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4

Ma se le ripetizioni possono essere arbitrarie, non ha più molto senso parlare di pesi campione e neanche, della particolare base del sistema di numerazione che abbiamo scelto?

RIFLESSIONE SUL PROBLEMA DELLA RIDONDANZA

Il caso in cui i pesi sono ridondanti non è sempre svantaggioso, anzi in alcuni casi si rivela un'idea brillante che permette di risolvere alcuni problemi, come abbiamo visto per la rappresentazione dei numeri negativi

Questa problematica è legata alla scoperta dello 0, che ha permesso di inventare la scrittura posizionale ed inoltre permette di utilizzare il "metodo del complemento" .

Infatti il complemento nasce proprio dall'idea che due numeri si dicono opposti quando la loro somma è 0.

Lo zero può essere pensato in diversi modi: negli esempi fatti prima 8 = 0.
L'importante è che esso sia l'elemento neutro della somma.

Il complemento può portare ridondanza, e se la base del sistema di numerazione è 2 porta certamente a ridondanza, come abbiamo visto prima.
Il complemento si può fare anche senza ridondanza, come per la base 3.

Se si vuole fin dall'inizio avere un sistema con ridondanza, in modo tale che un numero possa essere scritto in più modi diversi, basterà decidere quali scritture si vuole che siano uguali e dall'uguaglianza viene fuori la base del sistema di numerazione, però non ci sono sempre soluzioni possibili o reali.
Per poter avere soluzioni è comodo uguagliare i numeri ottenuti scambiando 0 con 1, in modo tale che non si semplifichino potenze di uguale esponente.

001 = 110 $x^2 + 1 = x$ non ha soluzioni reali
110011 = 001100 $x^5 + x^4 + x + 1 = x^3 + x^2$
etc.

Una possibile strada per poter costruire un sistema ridondante è:
100 = 011
$x^2 = x + 1$
la base dà origine per la verità a un sistema di numerazione troppo complicato, che definisce una base irrazionale.

UN ALTRO TIPO DI RIDONDANZA

Utilizzando tecniche matematiche è possibile costruire dei codici in grado di rilevare un certo numero di errori in un messaggio ed eventualmente è in grado di correggerli.
L'idea è quella di costruire dei codici ridondanti in cui la ridondanza viene sfruttata per individuare ed eventualmente recuperare gli errori.
Si pensi ad esempio di codificare 1 bit con 3 bit: se vale 1 si trasmette 111, se vale 0 si trasmette 000. Se chi riceve 010 sa che potrebbe trattarsi di una sequenza 000 in cui si è verificato un errore è in grado di utilizzare la corretta informazione e di ovviare ad una serie di possibili errori di trasmissione.