PESI TRADIZIONALI

Se si utilizzano i pesi tradizionali (' i pesi della nonna ')

5, 10, 10, 20, 50, 100, 100, 200, 500, 1000

si possono ottenere, combinandoli, tutti i seguenti pesi

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 … 1995

fino al valore massimo di 1995 = 5 + 10 +10 + 20 + 50 +100 +100 + 200 + 500 + 1000

Si può ottenere però più volte lo stesso numero (**ridondanza**), posso ottenere solo 399 valori diversi.

1995 : 5 = 399, tutti i multipli di 5, da 5 a 1995

Come posso giustificare che, combinando i pesi in tutti i modi possibili, posso ottenere tutti i valori diversi?

Tra 5 e 45 ci sono tutti: 5 10 15 20 25 30 35 40 45

Per ottenerli utilizzo i pesi 5 10 10 20

per trovare quelli tra 50 e 95 bisogna sommare, a 50, i pesi tra 5 e 50. Per ottenerli utilizzo oltre ai pesi 5 10 10 20 anche il peso 50 e così tra 100 e 150, utilizzo 5 10 10 20 100 e così via, non posso che ottenere tutti i multipli di 5.

5 è la misura più piccola che posso ottenere.

Se considero le combinazioni degli oggetti a uno a uno, a due a due, a tre a tre, ottengo tutti i numeri però non tutti diversi, perché viene un valore molto più alto di 399. Per questo c'è ridondanza. Infatti

$$N = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \ldots = 5*9 + 15*8 + 60*7 + \ldots > 399$$

È superfluo utilizzare i due piatti visto che già utilizzandone uno ho ridondanza.

PESI CAMPIONE IN BASE DUE

Utilizziamo per pesare un piatto solo della bilancia e 5 pesi campione:

1 2 4 8 16 **(1 10 100 1000 10000)**

Il valore massimo che è possibile ottenere è $\mathbf{2^5 - 1 = 31}$

Se considero le combinazioni di 5 oggetti presi a uno a uno, a due a due, a tre a tre, ecc. senza ripetizioni, ottengo

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=5+10+10+5+1=31$$

non ci sono quindi ridondanze, ripetizioni

Basta un piatto solo, perché tra un peso e il successivo la differenza è 1, quindi si possono ottenere tutte le pesate che servono utilizzando un solo piatto.

Infatti se si utilizza il secondo piatto è come se si utilizzasse oltre all'addizione anche la sottrazione. Infatti mettere un peso nel piatto con il peso incognito equivale a sottrarre quel peso da quello che è stato posto nell'altro piatto.

Infatti se uso due piatti

$4 + 2 - 1 = 4 + 1$

mi rendo conto che i numeri che posso ottenere utilizzando somme e differenze li posso ottenere anche utilizzando solo somme.

Il sistema diventa ridondante, nel senso che un determinato valore lo posso ottenere in più modi.

$5 = 4 + 2 - 1 = 4 + 1$

Il – davanti al numero sta ad indicare che metto il peso, in questo caso 1, dalla parte in cui sta il peso incognito

PESI CAMPIONE IN BASE TRE

Con pesi in base 3 ottengo il minor numero di pesi campione, ma devo usare 2 piatti

Supponiamo di avere a disposizione solo i primi 5 pesi:

1   3   9   27   81   (1   10   100   1000   10000)

Il massimo peso che si può ottenere è $121 = (3^5 - 1) / (3 - 1)$

Per ottenere tutti i pesi tra 1 e 121, utilizzando i pesi campione senza ripetizione, devo fare sottrazioni e addizioni

Ad esempio

2 = 3 – 1

7 = 9 + 1– 3

Questo significa che devo utilizzare ambedue i piatti della bilancia

Si devono considerare tutte le combinazioni, e per ogni combinazione di pesi devo tenere conto di quanti sono i modi in cui posso combinare addizioni e sottrazioni.

Considerati k pesi campione, si possono combinare le k-1 operazioni, ad esempio le tre possibili operazioni in 1 + 3 – 9 + 27, in tutti i modi possibili.

Se considero solo un peso campione devo fare zero operazioni, se considero due pesi campione l’unica operazione può essere o un’addizione o una sottrazione, basta comunque che venga considerato il numero delle addizioni, le operazioni che non sono addizioni non possono che essere sottrazioni.

Nel caso di quattro pesi campione, ad esempio, bisogna considerare il prodotto tra il numero dei modi in cui posso prendere i pesi campione e la somma del numero dei modi in cui posso avere una addizione, due addizioni, tre addizioni, quattro addizioni.

$$\binom{0}{0}*\binom{5}{1}+\left(\binom{1}{0}+\binom{1}{1}\right)*\binom{5}{2}+\left(\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right)*\binom{5}{3}+\left(\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right)*\binom{5}{4}+$$
$$\left(\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)*\binom{5}{5}=121$$

Ogni peso, tra 1 e il massimo possibile, lo posso ottenere in un solo modo.

Gli allievi possono dimostrare per esercizio che calcolando il numero delle combinazioni, se si utilizza un piatto solo, solo addizioni quindi, il numero dei pesi che posso ottenere è inferiore a tutti quelli che posso ottenere utilizzando i pesi campione.

Gli studenti possono anche provare a dimostrare anche che se si utilizzano addizioni e sottrazioni, il numero coincide con il numero dei pesi che è possibile ottenere con i pesi campione disponibili.

SE UTILIZZIAMO PESI IN BASE 10 ...

1 10 100…

Non riuscirei ad ottenere tutti i numeri tra 1 e il massimo, neanche utilizzando 2 piatti

Con pesi in base 3 ottengo il minor numero di pesi campione ma devo usare 2 piatti

1 3 9 27 81 243 729

Per **ridondanza** quindi si intende, in queste pagine, poter ottenere in più modi lo stesso numero utilizzando i pesi campione.

I pesi campione possono essere scelti arbitrariamente in base alla convenienza.

Se si usano i pesi

1 10 100 …

non possiamo ottenere, utilizzando solo i pesi campione,

tutti i pesi, tutti i numeri, tra il peso più grande e il peso più piccolo che posso ottenere

Peso maggiore = (1000 –1) / 9 = 111

L’errore che commetto è variabile tra 1 e 89

110 11 100 101 110 111

Utilizzando addizioni e sottrazioni non potrei ottenere comunque tutti i pesi tra 1 e 111.

Una soluzione potrebbe essere pesi campione ripetuti, oppure utilizzare come pesi campione non solo potenze della base, ed anche ripeterne alcune in modo opportuno, così come nel caso dei pesi tradizionali.

SE UTILIZZO LA BASE 3, se uso solo pesi campione, solo potenze di 3, e non uso sottrazioni, non ottengo tutti i pesi, che differiscono di una unità, tra il minore e il maggiore dei pesi possibili.
Se uso addizioni e sottrazioni, ottengo tutti i numeri a distanza 1 tra il maggiore e il minore (non posso ottenere 0).

Se uso numeri positivi e negativi, non ho ridondanza, se si esclude lo 0, lo zero lo posso ottenere sommando due numeri opposti, cosa che non posso simulare con la bilancia perché non ho pesi uguali, non posso utilizzare ad esempio 5 e anche -5, posso utilizzare uno solo dei due mettendolo o nel piatto dove sta l'oggetto incognito (-5) o nell'altro (+5)

Se utilizzo
1 3 9

Posso ottenere, utilizzando sottrazioni e addizioni

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
1 2 10 11 12 20 21 22 100 101 102 110 111 (in base 3)
ma non lo 0

Il numero maggiore possibile = $(3^3-1) / (3-1) = 13$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	3-1		3+1	9-3-1	9-3	9+1-3			…			

CONCLUSIONE

1. LA SCELTA PIÙ CONVENIENTE, SOTTO CERTI ASPETTI, SONO I PESI IN BASE 2

Infatti con 10 pesi

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512

riesco ad ottenere tutti i pesi tra 1 1023.

$1 + 4 + 8 + \ldots = (2^{10} - 1) = 1023$

con un errore di 1 e senza ridondanza,

ma con 11 pesi posso ottenere tutti i pesi tra 1 e 2047

2. SE SI UTILIZZANO PER PESARE DUE PIATTI DELLA BILANCIA CONVIENE UTILIZZARE PESI CAMPIONE IN BASE TRE

Posso ottenere tutti i numeri tra 1 e 121, tra il più piccolo e il più grande, con un errore di 1, non ho ridondanza e **ho il più piccolo numero di pesi campione**

3. I PESI TRADIZIONALI PERÒ NON SONO POI COSÌ SVANTAGGIOSI:

<table>
<tr><td>5 10 10 20
50 100 100 200
500 1000 1000 2000
…</td><td>1 2 4 8
16 32 64 128
256 512 1024 2048
…</td><td>1 3 9 27
81 243 729 2187
…</td></tr>
<tr><td>Peso massimo 4995</td><td>Peso massimo 4095</td><td rowspan="2">Peso massimo decisamente superiore agli altri casi, ma è necessario utilizzare tutti e due i piatti della bilancia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Come si vede i pesi tradizionali crescono in modo da ottenere un peso massimo superiore con lo stesso numero di pesi, rispetto alla base due, ma l’errore che si commette è superiore. Se però si aggiungono i pesi 1, 1, 2, posso ottenere tutti i pesi da uno al massimo possibile.</td></tr>
</table>